

LİDER ETKİSİNDEKİ SİSTEMLERDE NONLİNEER DÜŞÜNCE DİNAMİĞİ

Fatma Ataş¹, Ali Demirci² ve Cihangir Özemer³

^{1,2,3} İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

Opinion dynamics of a group of individuals is the change in the members' opinions through mutual interaction with each other. The related literature contains works in which the dynamics is modeled as a continuous system, of which behavioral patterns are analyzed in regard to the parameters contained in the system. These models are constructed by the assumption that the individuals are independent. Besides, the decisions of the individuals are only affected by two forces: self-bias force and group influence force. In this work we formulate a nonlinear dynamical system which models the evolution of the decision of a group under the existence of a leader. For some special parameter values, numerical solution of the dynamical system is obtained. According to the numerical solutions, formation of different opinion patterns is observed.

ÖZET

Bir topluluğun düşünce dinamiği, toplumdaki bireylerin birbirleriyle etkileşimi sonucu düşüncelerinde meydana gelen değişim olarak tanımlanır. Düşünce dinamiğinin matematiksel olarak sürekli bir dinamik sistemle modellendiği çalışmalarda, düşünce dinamiğini etki eden parametrelere bağlı olarak, topluluğun hangi tür davranış şekilleri geliştirdiği incelenmiştir. Bu çalışmalardaki modellerin oluşumunda, topluluktaki bireylerin bağımsız bireyler oldukları kabul edilmiştir. Ayrıca, topluluktaki bireylerin davranışının sadece kişisel önyargı ve grup etki kuvveti adı verilen iki kuvvet tarafından değiştiği düşünülmüştür. Bu çalışmada ise, toplulukta bir lider bireyin varlığında, topluluğun düşünce dinamiğini modelleyen nonlineer dinamik sistem modeli türetilmiştir. Seçilen bazı parametre değerleri için bu sistem sayısal olarak çözdürülmüş, topluluğa ait farklı davranış şekillerinin oluşabildiği gözlemlenmiştir.

GİRİŞ

Dinamik sistemler teorisinin önemli uygulama alanlarından biri, “sürü hareketi” ve “konsensus” (müşterek karar) problemlerinin analizidir. Bu tipte problemler pek çok fiziksel doğa olayında ve mühendislik uygulamalarında ortaya çıkmaktadır: Göç eden hayvan toplulukları (kuş-balık sürüleri), bir yerleşim bölgesi üzerinde birbiri ile iletişim halinde bulunan araçlar veya robotlar, galaksi veya yıldız topluluklarının hareketi, mikroorganizmaların yayılım hareketi gibi. Grup hareketinde, dinamiğinde en temel yasa, N tane ajandan oluşan topluluğun bireylerinin birbirine dokunmayacak kadar uzak, iletişimin kesilmesine engel olacak kadar da yakın mesafede bulunarak, bir çeşit “attractive-repulsive” kuvvet etkisinde evrimlerini sürdürmeleridir. Bu bağlamda en basit model,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

şeklinde bir dinamik sistemdir. Konsensus problemlerinde cevap aranan sorulardan biri, iletişim halinde olan ajanlar için,

$t \rightarrow \infty$ limitinde

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N \quad (2)$$

sonucuna varılarak bir fikir birliğinin elde edilip edilemeyeceğidir. Burada x_i , i numaralı ajanın zaman evriminde üreteceği “karar” (opinion) değeridir. Bu modelin uygulamada çok çeşitli versiyonları mevcuttur [1-3]. Dinamik sistemler teorisinin karar verme dinamiği, kültürel değişim modelleri, dilsel gelişim ve evrim modelleri, sürü hareketi modellerinde uygulamaları üzerine kapsamlı bir derleme için [4] incelenebilir.

Düşünce dinamiği, toplumdaki bireylerin birbirleriyle etkileyişimi sonucu düşüncelerinde meydana gelen evrimin incelenmesi şeklinde tanımlanır. Bu dinamiğin değişiminde sosyal ağların büyük bir etkisi vardır.

Bir topluluktaki N kişinin (karar vericilerin), başlangıçtaki görüşlerine ve ilgili andaki ağırlıklı ortalama görüşlerine bağlı olarak, doğrusal ayrık zamana göre etkilene sürecini inceleyen modellerden birisi Friedkin- Johnsen modeli olarak bilinmektedir [5]:

$$x_i(k+1) = a_i \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(k) + (1 - a_i) x_i(0); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k \geq 0. \quad (3)$$

Burada, $x_i(k)$, topluluktaki i . karar vericinin k anındaki görüşü; $x_i(0)$, i . karar vericinin başlangıçtaki düşüncesi; a_i , i . karar vericinin duyarlılığı ve w_{ij} , j . karar vericinin i . karar vericinin kararları üzerindeki ağırlıklı bağlanma ölçüğü olarak tanımlanmaktadır. (1) denklemi zamana göre bir ayrık fark denklem sistemi olarak düşünülüp, denklemin sağ tarafına $x_i(k) = (1 + a_i - a_i) x_i(k)$ terimi eklenip düzenlenirse,

$$x_i(k+1) - x_i(k) = a_i \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_j(k) - x_i(k)) + (1 - a_i) (x_i(k) - x_i(0)) \quad (4)$$

denklemi elde edilir [6]. [6] çalışmasında ayrık bir model olan (4) denklem sistemi yerine, topluluğun düşünce dinamiğinin zamana bağlı sürekli değişimini modelleyen ve bu ayrık sisteme denk olan

$$\frac{dx_i}{dt} = -\gamma_i (x_i - \mu_i) + \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} h(x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

diferansiyel denklem sistemi kullanılarak, topluluğun düşünce dinamiğinin sistemdeki parametrelere göre değişimi incelenmiştir.

(5) sistemi ile ifade edilen ve bir toplulukta bireylerin birbirleriyle etkileşimlerine bağlı olarak, topluluğu oluşturan üyelerin düşünce değişimindeki dinamiğinde, iki kuvvetin etkisinde zamana göre değiştiği kabul edilmektedir. Bu kuvvetler sırasıyla kişisel önyargı kuvveti (self-bias force) ve grup etki kuvvetidir.

Kişisel önyargı kuvveti, kişinin kendi düşüncesine olan bağlılığı ifade eden matematiksel olarak doğrusal bir kuvvettir. Bu kuvvet, (5) denklem sistemindeki denklemlerin sağ tarafındaki ilk terim ile modellenmiştir. $\gamma_i > 0$ olmak üzere bu kuvvet düşünce değişimi üzerinde negatif etkiye sahiptir. Terimdeki γ_i kişinin kendi düşüncesine bağlılığının şiddetini ve μ_i de doğal önyargısını gösterir, $\mu_i = x_i(0)$. Grup etki kuvveti ise, kişinin içinde bulunduğu ortamda kendinden farklı düşünen kişilerden etkilenmesi sonucunda meydana gelir. Bu kuvvet (5) denklem sistemindeki denklemlerin sağ tarafındaki ikinci terim ile modellenir. Etkileşimi modellemek için bu terimdeki $\kappa_{ij} > 0$ parametresi ve $h(x_j - x_i)$ fonksiyonu kullanılır. κ_{ij} bağlanma kuvveti (coupling strength) olarak adlandırılır ve topluluktaki j . bireyin, i . birey ile hangi sıklıkta iletişim kurduğunu gösterir. $h(x_j - x_i)$ bağlanma fonksiyonu (coupling function) olarak adlandırılır ve düşünceler arasındaki farka bağlı olarak topluluktaki j . bireyin i . birey üzerindeki etkisinin şiddetini temsil eder.

$h(x_j - x_i)$ modele nonlinear özellik katmakta olup, formu aşağıdaki gibidir:

$$h(x_j - x_i) = (x_j - x_i) \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x_j - x_i)^2}{\lambda_i^2} \right]. \quad (6)$$

Topluluktaki i. birey j. bireyden uzaklaştıkça aralarındaki etkileşim azalır. Bu azalmayı temsil etmek için $h(x_j - x_i)$ bağlanma fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlanmıştır. Toplumsal yargı teorisine (social judgment theory) göre farklı bir düşünceyle karşılaşan kişinin davranış ölçeği (attitude scale) üç bölgeden oluşur. Bu bölgeler sırasıyla düşüncenin kabul edildiği aralık (the latitude of acceptance), düşüncenin reddedildiği aralık (the latitude of rejection) ve bireyin kararsız olduğu aralıktır (the latitude of noncommitment). Bağlanma fonksiyonundaki λ_i parametresi düşüncenin kabul edildiği aralığı gösterir ve $|x_i - x_j| < \lambda_i$ eşitsizliğini sağlar [7].

PROBLEMİN TANIMI VE MODELİ

[6] çalışmasında (5) sistemi $N = 3$ bireyden oluşan bir topluluk için ele alınarak, sistemdeki maksimum başlangıç fikir farkı $\Delta\mu$ ve tekdüze κ 'dan oluşan parametre uzayının hangi bölgelerinde karar vericilerin kararları (sistemin durağan durumu) için sırasıyla simetrik yüksek fikir ayrılığı-SHD (symmetric high discord), çoğunluk yönetimi-MR (majority rule) ve simetrik düşük fikir ayrılığı SLD (symmetric low discord) olarak adlandırılan üç farklı davranış durumunun ortaya çıktığı araştırılmıştır. Bu analizin verdiği bilgi, (5) sistemi çözülmeden doğrudan parametreler üzerindeki bilgi ile grubun konsensus düzeyinin belirlenmesidir: Fikir ayrılığı, çoğunluk, veya fikir birliği olarak kabul edilebilecek durum.

Karar verme dinamiğinde incelenen durumlardan biri de, grupta bir liderin var olduğu durumdur. Lider etkisinin bulunduğu sistemlerde lider düşünce dinamiğini kontrol eden güç olarak tanımlanır. Hegselmann- Krause (HK) modeli bu tür sistemlere bir örnektir [8]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= u(t), \\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) + C_i(x_0 - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7a - b)$$

Burada lider, grup elemanlarının düşüncelerinden etkilenmeyen ama diğer elemanları etkileyen birey olarak tanımlanmıştır. Görüldüğü gibi x_0 bireyi sadece $u(t)$ ile değişen ve diğer bireylerden etkilenmeyen bir düşünce evrimine sahiptir ve gruptaki lideri temsil etmektedir.

Yukarıda bahsedilen literatürün motivasyonu, bu bildirinin konusunu aşağıdaki iki maddeyle çerçevesi çizilen problem oluşturmaktadır:

- (5) sistemi ile verilen düşünce dinamiği, grupta bir lider bireyin varlığında matematiksel olarak nasıl modellenir ? (5) ve (7) sistemlerinin birlikte ele alınmasına karşılık gelen bu karar verme modeli literatürde incelenmemiş bir problemidir.
- Bu model oluşturularak [6]'da yapılan analizin doğrultusunda incelenip parametre uzayı üzerinden dallanma analizi ile sistemin son, stabil durumu hakkında fikir ayrılığı (SHD), çoğunluk (MR), veya fikir birliği (SLD) öngörülleri yapılabilir mi ?

(5) ve (7) sistemleri birlikte düşünüldüğünde karar verme dinamiği problemimize esas olacak model,

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= u(t) \\ \frac{dx_i}{dt} &= -\gamma_i(x_i - \mu_i) + \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} h(x_j - x_i) + C_i(x_0 - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (8a - b)$$

şeklinde olup [6] ve [8]'de ele alınan dinamik sistemlerin bir kombinasyonudur. Tekrar ifade edilirse, x_0 diğer bireylerin düşüncelerinden etkilenmeyen liderdir. Diğer tüm bireyler ise (5) sisteminde ifade edilen dinamiğe sahip olmak yanında x_0 'ın evriminden de etkilenmektedir. C_i terimi liderin her bir birey üzerindeki etkisinin şiddetini ifade etmektedir [8]. Bu sabit lider olarak adlandırılan karar vericinin, topluluktaki diğer bireyler üzerindeki baskınlığını değiştirmek için kullanılır.

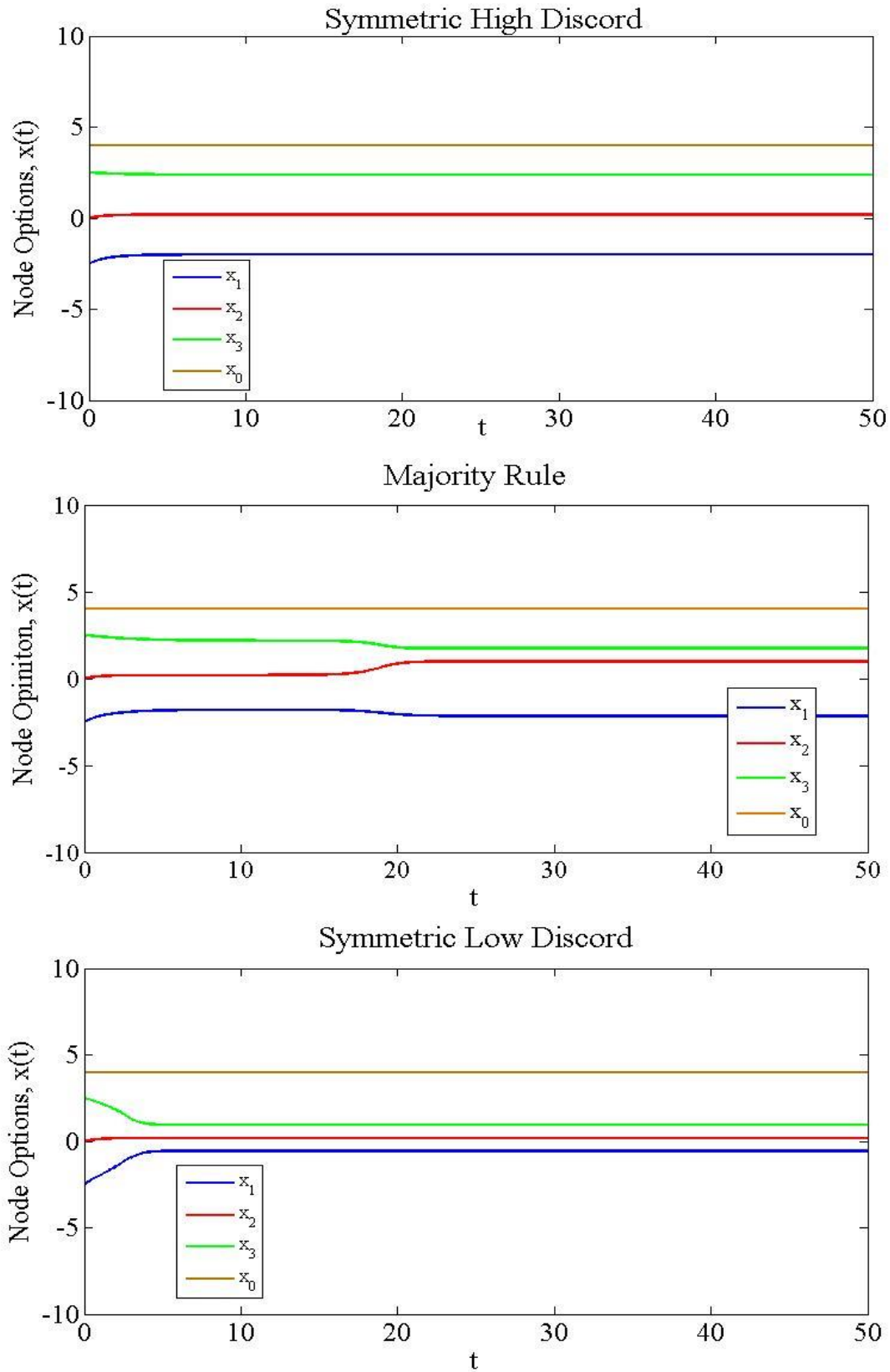
Yukarıdaki genel formu verilmiş olan denklem sistemi üç tane karar verici ve bir lidere sahip bir topluluk için [6]'da verilen analiz çerçevesinde yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= u(t) \\ \frac{dx_1}{dt} &= -(x_1 - \mu_1) + (\kappa + \nu) h(x_2 - x_1) + C_1(x_0 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + (\kappa - \nu) [h(x_1 - x_2) + h(x_3 - x_2)] + C_2(x_0 - x_2), \\ \frac{dx_3}{dt} &= -(x_3 - \mu_3) + (\kappa + \nu) h(x_2 - x_3) + C_3(x_0 - x_3)\end{aligned}\quad (9a - d)$$

sistemi elde edilir. Lider etkisinin tüm karar vericiler üzerindeki etkisinin eşit olduğu kabulü altında tek bir C_i değeri seçilerek (8) sisteminin incelemesi bu bildiride gerçekleştirilecek analiz olacaktır.

Bu sistemde sabit $C_1 = C_2 = C_3 = 0.05$ değeri alınarak, $\kappa = 1$, $\kappa = 1.5$ ve $\kappa = 3$ parametre değerleri için (9) sistemi MATLAB kullanılarak çözüldüğünde, sırasıyla simetrik yüksek fikir ayrılığı (SHD), çoğunluk yönetimi-MR ve simetrik düşük fikir ayrılığı SLD olarak adlandırılan üç farklı davranış durumunun ortaya çıkmasıyla karşılaşmaktadır (**Şekil-1**). Sistemin sayısal çözümü, $u(t) = 0$, $x_0 \equiv x_0(0) = 4$, $x_1(0) = -2.5$, $x_2(0) = 0$ ve $x_3(0) = 2.5$ başlangıç koşulları için gerçekleştirilmiştir.

SHD durumunda lider etkisi ve bağlanma kuvveti küçük olduğu için fikir ayrılığı maksimum seviyededir. Karar vericilerin ortak bir düşüncüyü kabul etmeleri imkansızdır. MR durumunda merkezdeki karar verici, uçtaki karar vericilerden birine yaklaşıp çoğunluk çifti (majority pair) olarak adlandırılan davranışı ortaya çıkarır. Topluluktaki yeterli çoğunluk sağlanırsa, bu çiftin kararı topluluğun kararı olarak kabul edilir. SLD durumunda ise, uçtaki karar vericiler merkezdeki karar vericinin düşüncesine yaklaşır ve topluluktaki bireylerin fikir ayrılığı en düşük seviyede olmaktadır. Topluluğun kararı merkezdeki karar vericinin düşüncesine çok yakındır.



Şekil-1: $C=0.05$ değeri seçilerek sırasıyla $\kappa = 1$, $\kappa = 1.5$ ve $\kappa = 3$ değerleri için ortaya çıkan farklı düşünce davranış şekillerinin evrimini gösteren (8) sisteminin çözümleri.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, lider birey olarak adlandırılan x_0 bireyinin yukarıda bahsedilen davranış şekillerinin oluşumunda etkisi incelenmiştir. $\kappa - \Delta\mu$ parametre çiftinin hangi değerleri için, x_0 lider bireyin olmadığı durumda yukarıda verilen topluluktaki karar dinamiğini modelleyen denklem sisteminin çözümlerinin SHD, MR ve SLD davranış tiplerini ortaya çıkardığı bilinmektedir [6]. Gabbay ilgili çalışmasında ilgili denklem sistemine dallanma (bifurcation) analizi yaparak, $\kappa - \Delta\mu$ parametrelerinin davranış sınıflarına olan bu etkisini lider bireyin olmadığı durumda belirlemiştir. Benzer bir yöntemle düşük profilli bir lider bireyin olduğu sistemde ($C=0.05$) benzer davranış gözlenebilir. Gabbay'ın lider bireyin olmadığı durumdaki sistem için kullandığı yöntem kullanılarak, daha ileriki bir çalışmada, liderin olması durumunda dallanma analizi yapılarak, $\kappa - \Delta\mu$ parametre uzayında davranış şekillerinin nasıl değiştiği irdelenecektir. Dallanma analizini daha kolay yapabilmek için, fikir ayrılığı $r = x_3 - x_1$, asimetri $s = x_3 - 2x_2 + x_1$ ve ortalama düşünce $\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ olarak adlandırılan yeni bağımlı değişkenler tanımlanarak, ilgili denklem sistemi aşağıdaki formda yeniden ifade edilir:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 = sbt., \\ \frac{dr}{dt} &= \mu_3 - \mu_1 - (1 + C)r - (\kappa + \nu) \left[h\left(\frac{r+s}{2}\right) + h\left(\frac{r-s}{2}\right) \right], \\ \frac{ds}{dt} &= \mu_3 + \mu_1 - (1 + C)s - (3\kappa - \nu) \left[h\left(\frac{r+s}{2}\right) - h\left(\frac{r-s}{2}\right) \right], \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{1}{3}(\mu_3 + \mu_1) - (1 + C)\bar{x} + Cx_0 - \frac{2}{3}\nu \left[h\left(\frac{r+s}{2}\right) - h\left(\frac{r-s}{2}\right) \right]. \quad (10a - d) \end{aligned}$$

Bu sisteme dallanma analizi yapılarak, $\kappa - \Delta\mu$ parametre çiftinin davranış tiplerinin oluşmasındaki etkisinin çatal tipi (pitchfork) dallanma oluşturacak şekilde ortaya çıktığının gösterilebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] R. Olfati-Saber, J.A. Fax, R.M. Murray (2007), Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems, Proceedings of the IEEE, 95, (1), 215-233.
- [2] S. Motsch, E. Tadmor (2014), Heterophilious Dynamics Enhances Consensus, SIAM Review, 56, (4), 577-621.
- [3] J. von Brecht, T. Kolokolnikov, A.L. Bertozzi, H. Sun (2012), Swarming on Random Graphs, J. Stat. Phys., 151, 150-173.
- [4] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto (2009), Statistical physics of social dynamics, Rev. Mod. Phys. 81, 591.
- [5] N.E. Friedkin, E.C. Johnsen, Social Influence Network Theory: A Sociological Examination of Small Group Dynamics (Cambridge University Press, Cambridge, 2011)
- [6] M. Gabbay, A.K. Das, Majority Rule in Nonlinear Opinion Dynamics, V. In et al. (eds.), International Conference on Theory and Application in Nonlinear Dynamics (ICAND 2012), part of the series Understanding Complex Systems, pp 167-179.
- [7] A. Eagly, S. Chaiken (1993). The Psychology of Attitudes. Harcourt, Fort Worth.
- [8] S. Wongkaew, C. Suttida, & A. Borzi (2014). On Control Through Leadership of The Hegselmann–Krause Opinion Formation Model. Mathematical Models and Methods in Applied Science, 25(3), 565-586. doi: 10.1142/S0218202515400060.